

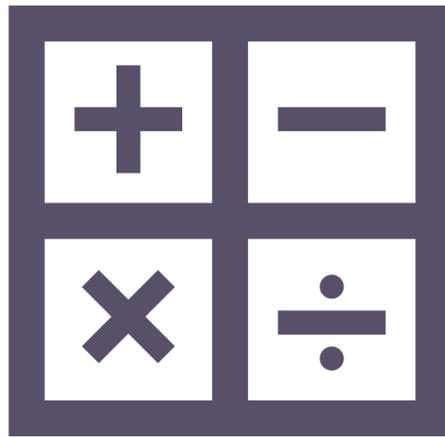


GOBIERNO DE PUERTO RICO

DEPARTAMENTO DE EDUCACIÓN  
Subsecretaría para Asuntos Académicos

# ***MÓDULO PARA REMEDIAR***

# **Matemáticas**



**Noveno grado**

enero 2020

Nombre del estudiante: \_\_\_\_\_

Número de SIE: \_\_\_\_\_

Nombre de la escuela: \_\_\_\_\_

Código de la escuela: \_\_\_\_\_ Municipio: \_\_\_\_\_

## **Querido estudiante:**

*Hemos trabajado con la ilusión de presentarte este módulo como una herramienta para desarrollar las destrezas que necesitas para la clase de Matemáticas. Encontrarás ejercicios de selección múltiple para que escojas la respuesta correcta.*

*El Departamento de Educación validará tu participación y tu esfuerzo al contestar los ejercicios en este módulo. La puntuación obtenida se sumará a tus notas e informe de progreso académico. Esperamos, que una vez finalices el noveno grado, hayas obtenido la misma satisfacción que nosotros al crear estos ejercicios para ayudarte.*



**9.A.3.2** Construye un sistema de ecuaciones lineales al modelar situaciones de la vida diaria y representa el sistema como una ecuación matricial ( $Ax=b$ ).

Se sabe que un sistema de ecuaciones lineales  $\begin{cases} ax+by=c \\ cx+dy=e \end{cases}$  se puede escribir con

matrices de la siguiente forma  $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$ .

1. Juan logra ahorrar al final del mes un total de \$80 con billetes de \$2 y \$5. Sabiendo que posee un total de 28 billetes, ¿cuál de las siguientes opciones representa el sistema que permitiría hallar la cantidad de billetes de \$2 y \$5 que tiene Juan?

(a)  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 80 \end{bmatrix}$

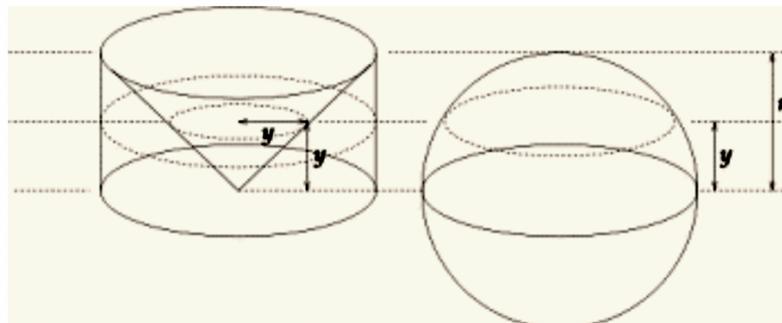
(b)  $\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 28 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 28 \end{bmatrix}$

(d)  $\begin{bmatrix} 5x+y \\ x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 80 \\ 28 \end{bmatrix}$

**9.G.12.1** Usa el principio de Cavalieri y presenta un argumento informal para las fórmulas de volumen de una esfera y de otras figuras tridimensionales.

**Principio de Cavalieri.** El Principio de Cavalieri dice que si sólidos iguales en altura, al ser cortados por cualquier plano paralelo a sus bases se producen en ellos secciones de igual área, entonces esos sólidos tendrán el mismo volumen.



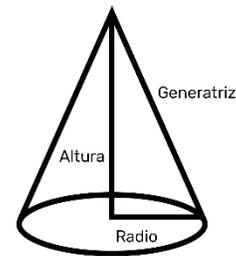
El área de la superficie de una esfera de radio  $r$  se puede hallar mediante la expresión  $A = 4\pi r^2$  y su volumen por medio de la fórmula  $V = \frac{4\pi r^3}{3}$ . El área y el volumen de un cilindro con diámetro  $d = 2r$  y altura  $h$  son respectivamente  $A = 2\pi \cdot r^2 + \pi d \cdot h$  y  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ .

2. Si se conoce que un cilindro posee un volumen 25% mayor que el de una esfera con un área de  $576\pi$  pulg<sup>2</sup>, ¿cuánto es el volumen del cilindro?
- (a)  $360\pi$  pulg<sup>3</sup>
  - (b)  $72\pi$  pulg<sup>3</sup>
  - (c)  $288\pi$  pulg<sup>3</sup>
  - (d)  $576\pi$  pulg<sup>3</sup>

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección. El principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

volumen de un cono de radio  $r$  y altura  $h$  es  $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ .

El de un cilindro con radio  $r$  y altura  $h$  es  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ . Por lo tanto, es simple encontrar la relación entre sus volúmenes cuando el cono y el cilindro tienen igual altura y la misma superficie de apoyo.

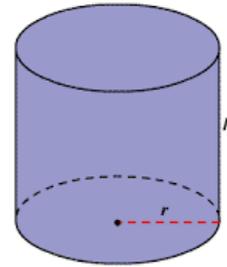


3. Un cilindro posee un diámetro de 6 pulgadas y una altura de 8 pulgadas. ¿Cuánto es el volumen de un cono con la misma base y altura que dicho cilindro?
- (a)  $72\pi$  pulg<sup>3</sup>
  - (b)  $24\pi$  pulg<sup>3</sup>
  - (c)  $288\pi$  pulg<sup>3</sup>
  - (d)  $96\pi$  pulg<sup>3</sup>

**9.M.13.2** Resuelve problemas mediante las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

Un cilindro de radio  $r$  y altura  $h$  posee en cada base un área de  $A = \pi \cdot r^2$ . Además, su área lateral tiene un valor de  $A = 2\pi r \cdot h$  y su volumen es igual a  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ .



4. Se deben construir 10 recipientes cilíndricos (sin tapa) de aluminio con 6 pulgadas de altura y 4 pulgadas de diámetro. ¿Cuánto metal se requiere para esta tarea?

- (a)  $280\pi$  pulg<sup>2</sup>
- (b)  $560\pi$  pulg<sup>2</sup>
- (c)  $320\pi$  pulg<sup>2</sup>
- (d)  $240\pi$  pulg<sup>2</sup>

**9.G.10.1** Aplica conceptos de densidad basándose en área y volumen para crear modelos.

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

La densidad ( $\delta$ ) es una propiedad que indica la cantidad de masa ( $m$ ) por unidad de volumen ( $V$ ) de una sustancia pura o una solución. Por ejemplo, la densidad del hierro es  $7.6 \text{ g/cm}^3$ , esto significa que hay 7.6 gramos cada  $1 \text{ cm}^3$  de hierro. La densidad se puede calcular mediante la expresión  $\delta = m/V$ .

5. Un recipiente posee las siguientes medidas interiores: 12 cm de largo, 10 cm de ancho y 8 cm de alto. Si se quiere llenar con un aceite de densidad  $0.85 \text{ g/cm}^3$ , ¿cuánta masa de aceite se puede almacenar?

- (a) 816 gramos
- (b) 1129.4 gramos
- (c) 960 gramos
- (d) 850 gramos

**9.G.10.1** Aplica conceptos de densidad basándose en área y volumen para crear modelos (ej., personas por milla cuadrada, BTU por pie cúbico).

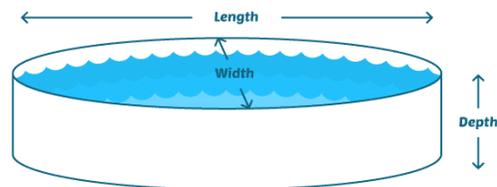
**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

La capacidad indica cuánto puede contener un recipiente; se puede expresar en litros (L) o mililitros (mL). El volumen indica cuánto espacio ocupa un objeto, y se puede medir en metros cúbicos ( $m^3$ ) o en centímetros cúbicos ( $cm^3$ ). Algunas de las equivalencias son:  $1\text{ cm}^3 = 1\text{ mL}$  y  $1\text{ m}^3 = 1,000\text{ L}$ . Sin considerar las dimensiones de las paredes de un recipiente, se puede hallar su capacidad calculando su volumen. En el caso de un prisma y un cilindro sus volúmenes son  $V = a \cdot l \cdot h$  y  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ , respectivamente.

6. Una piscina tiene las siguientes medidas interiores: 3 metros de largo, 2 m de ancho y 120 cm de profundidad. Si se encuentra con agua hasta los  $\frac{4}{5}$  de su capacidad, ¿cuántos recipientes cilíndricos con 20 cm de diámetro de 30 cm de altura se pueden llenar con el agua de la piscina? Redondea al entero más cercano.

- (a) 942
- (b) 191
- (c) 764
- (d) 611



**9.E.14.3** Desarrolla una distribución de probabilidad para una variable aleatoria definida en un espacio muestral donde las probabilidades teóricas se pueden calcular. Halla el valor esperado.

La regla multiplicativa de probabilidades permite hallar la intersección de dos eventos A y B. Se aplica para conocer cuál es la probabilidad de que los dos sucesos ocurran al mismo tiempo. Establece que para eventos independientes  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

Cuando los eventos son dependientes, es decir, el resultado del primer evento afecta el resultado del segundo, la probabilidad de que ambos ocurran es  $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$ . Siendo  $P(B/A)$  la probabilidad de ocurrencia del evento B conociendo la probabilidad de A.

7. Una distribución de probabilidades permite organizar todos los resultados posibles de una variable aleatoria junto con sus correspondientes probabilidades de ocurrencia. El valor esperado  $E(x)$  de una variable aleatoria discreta se calcula multiplicando cada valor que esta puede asumir por su probabilidad de ocurrencia y luego sumando los productos.

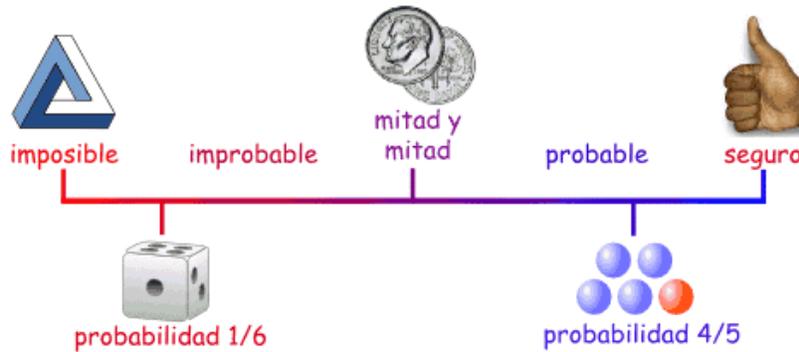
La siguiente tabla muestra la distribución de probabilidades correspondiente al tiempo (en minutos) que demora una computadora en recuperarse luego de una falla. ¿Cuál es el tiempo más probable de espera para volver a utilizar la computadora?

Tiempo (x)	2.0	3.0	4.0	5.0
Probabilidad P(x)	0.10	0.30	0.10	0.50

- (a) 5.0
- (b) 3.5
- (c) 4.0
- (d) 2.5

9.E.15.1 Describe sucesos como subconjuntos de un espacio muestral (el conjunto de resultados) usando las características (o categorías) de los resultados, o como uniones, intersecciones o complementos de otros sucesos ("o", "y", "no;" diagrama de Venn).

8. En una empresa con 30 empleados se encontró que 10 personas trabajan en administración, 8 personas en ventas y 6 en ambos sectores. Si se elige un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en ventas si se sabe que no trabaja en administración?
- (a)  $2/30$
  - (b)  $3/5$
  - (c)  $2/3$
  - (d)  $1/10$



**9.N.1.2** Aplica y explica cómo extender las propiedades de los exponentes enteros a los exponentes racionales, utilizando la notación de radicales en términos de exponentes racionales (ej., definimos  $5^{1/3}$  como la raíz cúbica de 5 porque queremos que  $(5^{1/3})^3 = 5$  sea válido).

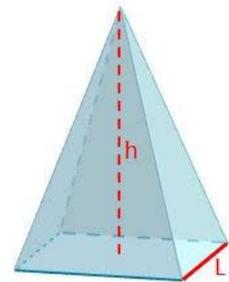
**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección, el principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

El volumen de un cono con radio  $r$  y altura  $h$  es  $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ . El volumen

de una pirámide cuadrangular es  $V = \frac{L^2 \cdot h}{3}$ , siendo  $h$  su altura y  $L$  el lado de su base. Se puede deducir que en ambos casos el volumen es la tercera parte del producto entre el área de la base y la altura.

9. Un cono y una pirámide de base cuadrada poseen el mismo volumen. Sabiendo que sus alturas son iguales, ¿cuánto mide el lado en la base de la pirámide si el cono tiene en su base un área de  $36\pi \text{ cm}^2$ ?



- (a) 6 cm
- (b)  $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$  cm
- (c)  $\frac{6}{\sqrt{\pi}}$  cm
- (d)  $6\sqrt{\pi}$  cm

**(+)9.N.2.1** Representa datos categorizados en dos variables en una matriz y rotula las filas y columnas. Interpreta el significado de una entrada particular de una matriz en términos de los contextos.

- Utiliza las matrices para analizar datos.
- Reconoce las matrices como sistemas que tienen algunas propiedades de los números reales.
- Desarrolla las propiedades de suma de matrices; suma y resta matrices para resolver problemas.
- Juzga la razonabilidad de los cálculos con matrices.

Se dice que dos matrices son iguales si sus elementos correspondientes (los ubicados en la misma posición) tienen el mismo valor. Es decir, considerando dos matrices A y B de dimensión 2x2 se tiene que:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{12}, a_{21} = b_{21}, a_{22} = b_{22}$$

10. De acuerdo a lo anterior, halla el valor de m y n si las matrices A y B son iguales.

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2n-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m+2 & 5 \\ 8 & 16 \end{bmatrix}$$

- (a) m=5 y n=8
- (b) m=1 y n=10
- (c) m=6 y n=6
- (d) m=-1 y n=18

**(+)9.A.3.2** Construye un sistema de ecuaciones lineales modelando situaciones de la vida diaria, y representa el sistema como una ecuación matricial ( $Ax = B$ ).

**(+)9.A.3.3** Resuelve un sistema que consiste de dos o tres ecuaciones lineales en dos o tres incógnitas, respectivamente, solucionando la ecuación matricial  $Ax = B$ , y hallar  $x = A^{-1} B$  utilizando tecnología.

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales en forma de filas (m) y columnas (n). Un sistema con m ecuaciones y n incógnitas se puede escribir en forma matricial utilizando la matriz de coeficientes A, la matriz de incógnitas X y la matriz de términos independientes B.

Un veterinario prepara muestras con 100 gramos cada una de dos tipos de alimentos (A y B) para gatos. La siguiente tabla muestra la composición de estas muestras.



	Proteínas (gramos)	Carbohidratos (gramos)
Alimento A	25	75
Alimento B	35	65

11. Si utiliza de 310 gramos de proteínas y 690 gramos de carbohidratos, ¿cuántas muestras de cada alimento puede producir?

- (a)  $a=6$  y  $b=4$
- (b)  $a=4$  y  $b=6$
- (c)  $a=7$  y  $b=3$
- (d)  $a=2$  y  $b=8$

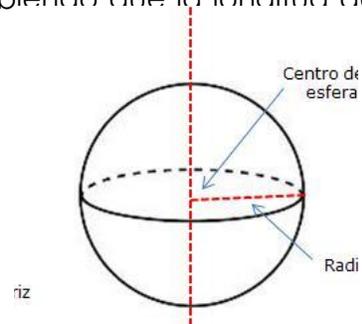
**9.M.13.3** Identifica las figuras de las secciones transversales bidimensionales de objetos tridimensionales, e identifica objetos tridimensionales generados por la rotación de objetos bidimensionales.

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección, el principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

El ecuador de una esfera es la circunferencia obtenida al cortar dicha esfera con un plano perpendicular a su eje de revolución que contiene al centro de la misma. Una esfera con radio de  $r$  tiene un área  $A = 4\pi \cdot r^2$  y un volumen  $V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$

12. Calcula el área y el volumen de una esfera sabiendo que la longitud de su ecuador es  $L = 12\pi$  cm.

- (a)  $A = 36\pi \text{ cm}^2$  y  $V = 216\pi \text{ cm}^3$
- (b)  $A = 576\pi \text{ cm}^2$  y  $V = 2304\pi \text{ cm}^3$
- (c)  $A = 144\pi \text{ cm}^2$  y  $V = 288\pi \text{ cm}^3$
- (d)  $A = 48\pi \text{ cm}^2$  y  $V = 32\pi\sqrt{3} \text{ cm}^3$

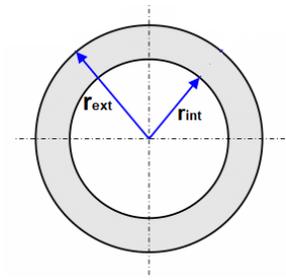


**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

**9.M.13.3** Identifica las figuras de las secciones transversales bidimensionales de objetos tridimensionales, e identifica objetos tridimensionales generados por la rotación de objetos bidimensionales.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

El volumen de un prisma o un cilindro sólido se puede expresar en función del área de la base de apoyo y la altura a través de:  $V = A_{\text{base}} \cdot h$ . Si el objeto es hueco y se quiere calcular su capacidad, entonces hay que considerar la parte vacía al calcular el área de la base. A continuación, la vista de la base de un cilindro considerando sus paredes.



13. Un tanque cilíndrico tiene una altura de 3 m y un diámetro exterior de 10 m. Sus paredes tienen un espesor de 20 cm. Para llenarlo se usan camiones cisternas que transportan 5,000 litros de agua. Estima cuántos camiones se deben utilizar para llenar el tanque.

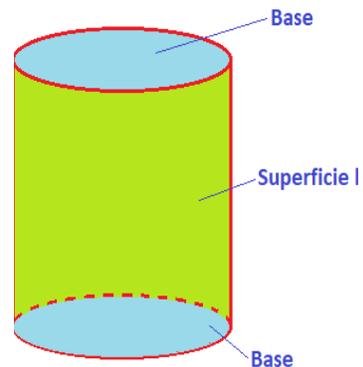
- (a) 44
- (b) 440
- (c) 47
- (d) 181

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

**9.N.1.2** Aplica y explica cómo extender las propiedades de los exponentes enteros a los exponentes racionales, utilizando la notación de radicales en términos de exponentes racionales (ej., definimos  $5^{1/3}$  como la raíz cúbica de 5 porque queremos que  $(5^{1/3})^3 = 5$  sea válido).

El volumen de un cilindro con radio  $r$  y altura  $h$  es  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ . Analizando la fórmula se deduce que, manteniendo la altura constante, el volumen es directamente proporcional al cuadrado del radio. Y que, manteniendo el radio constante, el volumen aumenta (o disminuye) en el mismo factor que la altura.



14. Si se aumenta el radio de un cilindro en un 20% manteniendo la misma altura, ¿cuánto aumentará el volumen del cilindro?

- (a) 66%
- (b) 44%
- (c) 20%
- (d) 40%

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

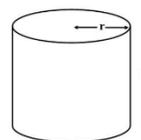
**9.M.13.3** Identifica las figuras de las secciones transversales bidimensionales de objetos tridimensionales, e identifica objetos tridimensionales generados por la rotación de objetos bidimensionales.

El área lateral de un cilindro (con altura  $h$  y radio  $r$ ) equivale al área de un rectángulo con la misma altura que dicho cilindro y una base con igual longitud que el perímetro de la base del cilindro. Por lo tanto, considerando las bases del cilindro, el área total es  $A_T = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$ . Y su volumen  $V = \pi r^2 \cdot h$ .

15. Se tiene una lámina rectangular con  $216\pi \text{ cm}^2$  de área, ¿cuál de las siguientes opciones corresponde a las medidas del diseño que permitiría construir un recipiente cilíndrico con el mayor volumen posible? Considera el recipiente cerrado.

- (a) Diámetro = 12 cm y altura = 6 cm.
- (b) Diámetro = 6 cm y altura = 12 cm.
- (c) Radio = 12 cm y altura = 12 cm.
- (d) Diámetro = 12 cm y altura = 12 cm.

$$V = \pi r^2 h$$



**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

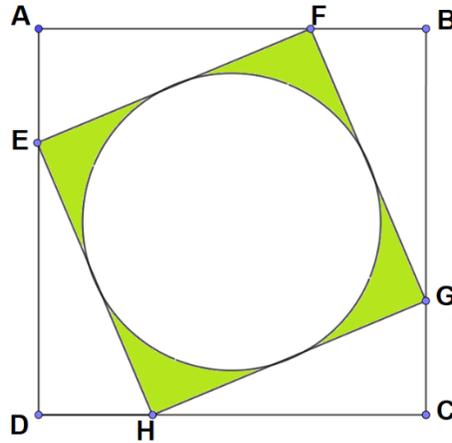
**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**9.M.13.3** Identifica las figuras de las secciones transversales bidimensionales de objetos tridimensionales, e identifica objetos tridimensionales generados por la rotación de objetos bidimensionales.

El teorema de Pitágoras relaciona las medidas de los lados de un triángulo rectángulo. Establece que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos. Es decir, en un triángulo recto ABC, siendo la hipotenusa el lado  $c$ , entonces  $c^2 = a^2 + b^2$ .

Si se quiere hallar el área de una figura irregular, una posible estrategia es expresarla en relación a otras figuras más simples y regulares con medidas conocidas.

16. Si se corta un cono con diferentes planos perpendiculares a su altura, se obtienen diferentes círculos. Algunos de estos cortes fueron hechos por los planos cuadrados de la imagen. Si el área del cuadrado exterior ABCD es de  $289 \text{ cm}^2$ , ¿cuánto mide el área de zona coloreada sabiendo que el segmento CG mide 5 centímetros?



- (a)  $169 \text{ cm}^2$   
 (b)  $36.27 \text{ cm}^2$   
 (c)  $58 \text{ cm}^2$   
 (d)  $62 \text{ cm}^2$

**9.G.11.1** Establece conjeturas basadas en la exploración de situaciones geométricas, con y sin tecnología.

**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**(+) 9.G.12.1** Usa el principio de Cavalieri, presenta un argumento informal para las fórmulas de volumen de una esfera y de otras figuras sólidas.

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

Los volúmenes de un cono, una esfera y un cilindro se pueden relacionar de manera simple a través de sus expresiones:

$$V_{\text{cono}} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}, \quad V_{\text{cilindro}} = \pi \cdot r^2 \cdot h, \quad V_{\text{esfera}} = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$$

17. En un laboratorio de química hay tres recipientes. Uno con forma de cono, otro esférico y otro cilíndrico. Se sabe que todos poseen el mismo radio y que el diámetro de la esfera es igual a la altura del cono y del cilindro.

Sabiendo que el radio de la esfera es 6 cm, calcula la diferencia entre el volumen del cilindro y el volumen del cono.

- (a)  $72\pi \text{ cm}^3$
- (b)  $144\pi \text{ cm}^3$
- (c)  $288\pi \text{ cm}^3$
- (d)  $576\pi \text{ cm}^3$

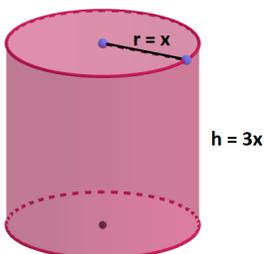
**9.E.15.1** Describe sucesos como subconjuntos de un espacio muestral (el conjunto de resultados) usando las características (o categorías) de los resultados, o como uniones, intersecciones o complementos de otros sucesos ("o", "y", "no;" diagrama de Venn).

La regla aditiva de probabilidades establece que la unión de dos eventos A y B puede ser encontrada sumando las probabilidades de cada evento y restando la intersección de los dos eventos. Es decir,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .

18. Un curso de 100 estudiantes ha realizado dos exámenes: uno de matemáticas y otro de español. Se sabe que 24 estudiantes aprobaron matemáticas, 42 español y 8 aprobaron los dos exámenes. Si se elige un estudiante al azar, ¿qué probabilidad existe de que no haya aprobado ningún examen?

- (a) 0.26
- (b) 0.42
- (c) 0.58
- (d) 0.74

**9.E.15.1** Describe sucesos como subconjuntos de un espacio muestral (el conjunto de resultados) usando las características (o categorías) de los resultados, o como uniones, intersecciones o complementos de otros sucesos ("o", "y", "no;" diagrama de Venn).



La regla multiplicativa de probabilidades permite hallar la intersección de dos eventos A y B. Se aplica para conocer cuál es la probabilidad de que los dos sucesos ocurran al mismo tiempo. Establece en general que  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$ . Si A y B son independientes, entonces se cumple que  $P(B/A) = P(B)$ , de esta forma la expresión para eventos independientes es  $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ .

19. En una fábrica de baterías hay dos líneas de producción (A y B). Se sabe que la probabilidad de que una batería presente fallas es 0.04. Si el 40% de la producción se realiza en la línea A, ¿cuál es la probabilidad de que, al seleccionar una batería al azar, se produzca en la línea B y sea defectuosa?

- (a) 0.024
- (b) 0.016
- (c) 0.560
- (d) 0.020

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

El área total de un cilindro se halla sumando las áreas de sus bases y el área lateral. Por lo tanto, un cilindro con radio  $r$  y altura  $h$ , posee un área total igual que se puede calcular mediante:  $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi \cdot r \cdot (r + h)$ .

20. ¿Cuánto es el valor de  $x$  en la siguiente figura si el área total de su superficie es  $144\pi$   $\text{cm}^2$ ?

- (a)  $x = 12$  cm
- (b)  $x = 4.24$  cm
- (c)  $x = 3$  cm
- (d)  $x = 6$  cm

**(+)9.N.2.1** Representa datos categorizados en dos variables en una matriz y rotula las filas y columnas. Interpreta el significado de una entrada particular de una matriz en términos de los contextos.

- Utiliza las matrices para analizar datos.
- Reconoce las matrices como sistemas que tienen algunas propiedades de los números reales.
- Desarrolla las propiedades de suma de matrices; suma y resta matrices para resolver problemas.
- Juzga la razonabilidad de los cálculos con matrices.

**(+)9.A.3.1** Verifica las propiedades de la multiplicación de una matriz por un escalar y utiliza estas propiedades para resolver problemas.

El producto de una matriz A de orden  $m \times n$  y un número real k, es otra matriz con el mismo tamaño en la que cada elemento de A se multiplicó por k.

Por ejemplo, siendo  $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ , entonces  $kA = \begin{bmatrix} k \cdot a & k \cdot b \\ k \cdot c & k \cdot d \end{bmatrix}$ .

21. La siguiente tabla representa las ventas totales del último mes de una empresa considerando los tres productos que vende (P, Q y R) en sus dos tiendas (A y B).

	Tienda A	Tienda B
Producto P	240	200
Producto Q	300	250
Producto R	180	400

Si se estima que en este mes las ventas aumenten un 20%, ¿cuál matriz representará las nuevas ventas?

- (a)  $\begin{bmatrix} 48 & 40 \\ 60 & 50 \\ 36 & 80 \end{bmatrix}$
- (b)  $\begin{bmatrix} 288 & 360 & 216 \\ 240 & 300 & 480 \end{bmatrix}$
- (c)  $\begin{bmatrix} 288 & 240 & 528 \\ 360 & 300 & 660 \\ 216 & 480 & 696 \end{bmatrix}$
- (d)  $\begin{bmatrix} 288 & 240 \\ 360 & 300 \\ 216 & 480 \end{bmatrix}$



**9.E.18.2** Calcula el valor esperado de una variable aleatoria; lo interpreta como la media de la distribución de probabilidad.

La esperanza matemática de una variable aleatoria discreta es la suma de los productos entre cada valor de la variable y su probabilidad respectiva. El nombre de esperanza matemática tiene su origen en los juegos de azar y se refiere a la ganancia esperada por un jugador cuando hace un gran número de apuestas. Si la esperanza matemática es cero, el juego es justo.

22. Pedro crea una lotería con sus amigos en la que la probabilidad de ganar el primer premio de \$300 es 0.02 y la probabilidad de ganar el segundo premio de \$100 es 0.04. Estima a cuánto podría vender cada boleta para participar de su juego de lotería.

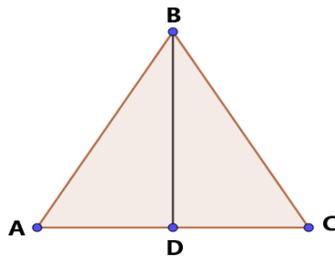
- (a) \$11
- (b) \$10
- (c) \$6
- (d) \$4

**9.G.11.1** Establece conjeturas basadas en la exploración de situaciones geométricas, con y sin tecnología.

**(+) 9.G.11.4** Organiza y presenta pruebas directas y pruebas indirectas utilizando dos columnas, párrafos y diagramas de flujo.

Se dice que dos figuras geométricas son congruentes cuando tienen las mismas dimensiones y la misma forma sin importar la posición. La congruencia de triángulos se basa en criterios o postulados referidos al comparar ángulos y lados correspondientes. Por ejemplo, el criterio LLA significa lado-lado-ángulo y establece que dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente iguales dos lados y el ángulo opuesto al mayor de ellos.

23. En la siguiente figura se conoce que  $\overline{BA} \cong \overline{BC}$  y  $\angle ABD \cong \angle CBD$ . Si se quiere probar que  $\triangle BAD \cong \triangle BCD$ , ¿qué debería estar en la razón 4 de la siguiente demostración?



Afirmaciones	Razones
1. $\overline{BA} \cong \overline{BC}$	1. Dado
2. $\angle ABD \cong \angle CBD$	2. Dado
3. $\overline{BD} \cong \overline{BD}$	3. Un segmento es congruente consigo mismo
4. $\triangle BAD \cong \triangle BCD$	4. ¿...?

- (a) Postulado de congruencia ALA.
- (b) Postulado de congruencia LLL.
- (c) Postulado de congruencia LAL.
- (d) Definición de bisectriz.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

Muchas veces se quiere calcular cuántas figuras pequeñas se pueden crear a partir de otra más grande, para esto es necesario preguntarse con qué dimensiones se trabaja: solo la longitud (cortar un cable), la superficie (cortar una lámina) o el volumen (hacer ladrillos con un bloque de piedra). Para el siguiente problema, considera:

El área total  $A = 2A_b + A_L$  y el volumen  $V = A_b \cdot h$  de un cilindro, siendo  $A_b$  el área de una de sus bases y  $A_L$  el área lateral.

El área total  $A = A_b + P_b \cdot Ap$  y el volumen  $V = \frac{A_b \cdot h}{3}$  de una pirámide, siendo el área de la base  $A_b$ , el perímetro de la base  $P_b$  y la apotema  $Ap$ .

24. Una caja posee las siguientes dimensiones: 80 cm de largo, 40 cm de ancho y 30 cm de alto. Se quieren guardar en esta caja juguetes con forma de pirámide de base cuadrada con 4 cm de lado y 12 cm de alto. Calcula cuántas pirámides se pueden guardar en la caja, suponiendo que se puede aprovechar toda su capacidad.



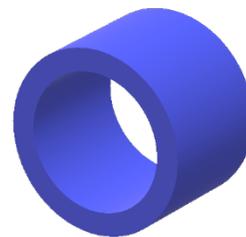
- (a) 6,000
- (b) 2,000
- (c) 500
- (d) 1,500

**9.G.10.1** Aplica conceptos de densidad basándose en área y volumen para crear modelos (ej., personas por milla cuadrada, BTU por pie cúbico).

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

La densidad es la relación que existe entre la masa de una sustancia y el volumen que ocupa. Por ejemplo, la densidad del aluminio es  $2.7 \text{ g/cm}^3$ , esto significa que cada  $1 \text{ cm}^3$  de aluminio tiene una masa de 2.7 gramos. En muchas ocasiones interesa hallar la masa de un objeto sabiendo sus dimensiones, para esto se calcula el volumen del mismo. Si el objeto es hueco, hay que considerar la parte vacía.

25. Calcula la densidad de la siguiente pieza sabiendo que tiene una masa de 200 gramos. Su longitud es 8 cm, el diámetro interior es 4 cm y el exterior es 5 cm. Calcula la masa de la pieza.



- (a)  $0.77 \text{ g/cm}^3$
- (b)  $0.28 \text{ g/cm}^3$
- (c)  $3.54 \text{ g/cm}^3$
- (d)  $1.27 \text{ g/cm}^3$

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

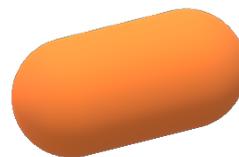
**(+) 9.M.14.1** Usa figuras geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (ej., hacer un modelo cilíndrico del tronco de un árbol o de un torso humano).

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

El volumen de cuerpos compuestos por partes simples y regulares se puede hallar considerando los volúmenes de cada una de estas partes. Por ejemplo, si se acopla un cono en la base de un cilindro, entonces el volumen total es la suma del volumen del cono y el volumen del cilindro.

26. La siguiente cápsula se halla formada por un cilindro y dos semiesferas. ¿Cuánto volumen tiene este objeto si el cilindro posee una longitud de 24 cm y un diámetro de 12 cm?

- (a)  $1,440\pi \text{ cm}^3$
- (b)  $5,760\pi \text{ cm}^3$
- (c)  $1,008\pi \text{ cm}^3$
- (d)  $1,152\pi \text{ cm}^3$



**(+)9.N.2.1** Representa datos categorizados en dos variables en una matriz y rotula las filas y columnas. Interpreta el significado de una entrada particular de una matriz en términos de los contextos.

- Utiliza las matrices para analizar datos.
- Reconoce las matrices como sistemas que tienen algunas propiedades de los números reales.
- Desarrolla las propiedades de suma de matrices; suma y resta matrices para resolver problemas.
- Juzga la razonabilidad de los cálculos con matrices.

Una matriz A es un arreglo rectangular de números reales con m filas y n columnas. Donde un elemento  $a_{ij}$  se ubica en la fila i y en la columna j. Por ejemplo, la matriz A

tiene 3 filas y 4 columnas, siendo  $a_{32} = 0$ .  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -8 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

27. La siguiente matriz representa las ganancias (en miles de \$) de una empresa en el último trimestre por la venta de 2 de sus productos.

$$G = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 30 \\ 24 & 32 & 45 \end{pmatrix}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

- (a) Las ganancias del segundo mes del trimestre fueron 101 miles de dólares.
- (b) Las ganancias del tercer mes del periodo fueron 75 miles de dólares.
- (c) Las ganancias producidas por uno de los productos fueron 36 miles de dólares.
- (d) Las ganancias del primer mes del trimestre fueron 62 miles de dólares.

**(+)9.A.3.2** Construye un sistema de ecuaciones lineales modelando situaciones de la vida diaria, y representa el sistema como una ecuación matricial ( $Ax = B$ ).

**(+)9.A.3.3** Resuelve un sistema que consiste de dos o tres ecuaciones lineales en dos o tres incógnitas, respectivamente, solucionando la ecuación matricial  $Ax = B$ , y hallar  $x = A^{-1} B$  utilizando tecnología.

Un sistema de ecuaciones lineales es un conjunto de m ecuaciones con n incógnitas de grado uno. Un sistema  $2 \times 2$  tiene 2 ecuaciones con 2 variables y se puede representar de cualquiera de las siguientes formas:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ f \end{bmatrix}$$

28. Se necesita preparar alimento para cerdos mezclando leche en polvo y harina de pescado. El contenido de proteínas de la leche es del 3% y el de la harina es del 18%. ¿Qué sistema de ecuaciones permite calcular los kilogramos de necesarios de leche y harina para preparar 500 kg de alimento con un 15% de proteínas?

- (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.03 & 0.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 75 \end{pmatrix}$
- (b)  $\begin{pmatrix} 1 & 0.03 \\ 1 & 0.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 75 \end{pmatrix}$
- (c)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0.03 & 0.18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 75 \\ 500 \end{pmatrix}$
- (d)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 18 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 15 \end{pmatrix}$

**(+) 9.G.12.1** Usa el principio de Cavalieri, presenta un argumento informal para las fórmulas de volumen de una esfera y de otras figuras sólidas.

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección, el principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

El volumen de una esfera es  $V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$  y el de un cilindro  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ . Si tienen el mismo radio y  $h = 2r$ , entonces el volumen del cilindro se halla en una relación 3:2 con el de la esfera.

29. Se colocan tres bolitas esféricas de 6 mm de diámetro dentro de un cilindro con 18 mm de altura y 6 mm de diámetro. Calcula cuánto espacio vacío queda dentro del cilindro.

- (a)  $162\pi \text{ mm}^3$
- (b)  $108\pi \text{ mm}^3$
- (c)  $16\pi \text{ mm}^3$
- (d)  $54\pi \text{ mm}^3$

**9.G.10.1** Aplica conceptos de densidad basándose en área y volumen para crear modelos (ej., personas por milla cuadrada, BTU por pie cúbico).

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

La razón unitaria de una propiedad “p” respecto del área de una superficie se puede definir como una densidad dividiendo el valor de “p” entre el área de dicha superficie. Por ejemplo, si calculamos que un terreno necesita una fertilización de 600 gramos de nitrógeno cada 30 metros cuadrados, entonces la tasa de fertilización es  $20 \text{ g/m}^2$ . Resuelve el siguiente problema considerando que el área total de un poliedro es la suma de las áreas de todas sus caras.

30. Se debe pintar un tanque cónico con 10 metros de diámetro y 12 metros de altura. Se estima un consumo promedio de pintura de  $0.5 \text{ L/m}^2$  y un costo de  $\$1.25/\text{L}$ . Si se pinta todo el exterior y el interior del tanque, incluyendo la tapa, ¿cuánto dinero se necesita para comprar toda la pintura necesaria?

- (a) \$255.25
- (b) \$176.71
- (c) \$353.43
- (d) \$333.79

**(+)9.A.3.2** Construye un sistema de ecuaciones lineales modelando situaciones de la vida diaria, y representa el sistema como una ecuación matricial ( $Ax = B$ ).

Un sistema de ecuaciones lineales  $2 \times 2$  posee 2 ecuaciones con 2 variables de grado uno. Este sistema se puede representar de la siguiente forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Considera siempre que al plantear un problema con dos incógnitas debe haber datos suficientes para construir dos ecuaciones independientes y así tener una única solución.

31. Se compraron 130 latas de pintura, algunas contienen pintura de tipo A y otras de tipo B. Si se hubieran comprado 5 latas más de pintura de tipo A, el número de dichas latas hubiese sido el doble de las que contienen la pintura tipo B. ¿Qué sistema de ecuaciones se puede utilizar para hallar la cantidad de latas de cada tipo de pintura?

- (a)  $\begin{cases} A + B = 130 \\ A + 5 = 2B \end{cases}$
- (b)  $\begin{cases} A + B = 130 \\ B = 2A - 5 \end{cases}$
- (c)  $\begin{cases} A + B = 130 \\ A = 2B + 5 \end{cases}$
- (d)  $\begin{cases} A + B = 130 \\ A + 5 = 2(B - 5) \end{cases}$

**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

**(+) 9.M.14.1** Usa figuras geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (ej., hacer un modelo cilíndrico del tronco de un árbol o de un torso humano).

En numerosos problemas de diseño se quiere calcular cuántas figuras pequeñas se pueden obtener a partir de otra más grande, para lo cual hay que preguntarse con qué dimensiones se trabaja: longitud, superficie o volumen. Por ejemplo, si queremos saber

cuántos rectángulos (N) de largo “a” y ancho “b” se pueden recortar (sin desperdiciar) de una lámina cuadrada con lado L, realizamos la siguiente operación:

$$N = \frac{A_{\text{total}}}{A_{\text{unitaria}}}$$

32. Se quiere construir un muro de 4 m de alto, 12 m de largo y 10 cm de espesor. ¿Cuántos ladrillos de 8 cm de alto, 20 cm de largo y 10 cm de espesor se requieren?
- (a) 3,000
  - (b) 6,000
  - (c) 2,000
  - (d) 30,000

**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

**(+) 9.M.14.1** Usa figuras geométricas, sus medidas y sus propiedades para describir objetos (ej., hacer un modelo cilíndrico del tronco de un árbol o de un torso humano).

Los problemas de comparación de cantidades son cuestiones de medición. Averiguar cuántas veces cabe una cantidad dentro de otra es compararlas. Por ejemplo, al establecer que se necesitan 40 losetas cuadradas de lado L para cubrir la superficie de un patio (de medidas  $b \times h$ ), significa que el área de este se puede medir como el área de 40 losetas idénticas a las usadas. Es decir, el área del patio equivale al área cubierta por 40 losetas.

33. Se quieren empapelar las paredes de una habitación cuadrada de  $5 \times 5$  m de lado utilizando rollos de papel de 40 cm de alto y 10 m de largo. La habitación tiene 3 m de alto, posee una puerta con 1.50 m de ancho por 2.2 m de alto y una ventana con 1 m de alto por 1.2 m de ancho. ¿Cuánto papel se necesita para empapelar la habitación?
- (a) 7 rollos
  - (b) 14 rollos
  - (c) 15 rollos
  - (d) 18 rollos

**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**(+) 9.G.12.1** Usa el principio de Cavalieri, presenta un argumento informal para las fórmulas de volumen de una esfera y de otras figuras sólidas.

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección, el principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

El volumen de un cilindro con radio  $r$  y altura  $h$  es  $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ . Y el de una esfera es  $V = \frac{4\pi \cdot r^3}{3}$ , siendo el radio  $r$ . Ambas expresiones se pueden relacionar bajo diferentes condiciones de trabajo.

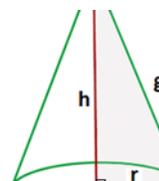
34. Un cilindro y una esfera poseen el mismo valor del radio. Si la esfera tiene un volumen igual a un tercio del volumen del cilindro, ¿cuánto vale la altura de este si el radio de la esfera es 9 cm?

- (a) 12 cm
- (b) 36 cm
- (c) 324 cm
- (d) 18 cm

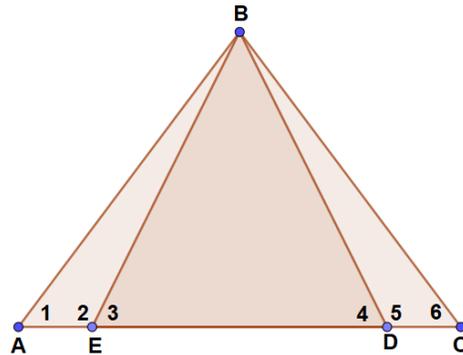
**(+) 9.G.11.4** Organiza y presenta pruebas directas y pruebas indirectas utilizando dos columnas, párrafos y diagramas de flujo.

Las figuras congruentes son aquellas que tienen la misma forma y las mismas medidas. Las semejantes son aquellas que tienen igual forma, pero distintas dimensiones. Al comparar dos figuras congruentes o semejantes es necesario prestar atención a los lados y ángulos correspondientes, es decir, a aquellos ubicados en posiciones coincidentes o análogas.

Por ejemplo, según el postulado de congruencia LLL para triángulos: "Si las medidas de los lados correspondientes de dos triángulos son iguales, entonces dichos triángulos son congruentes".



35. Analiza la siguiente figura. Sabiendo que  $\angle 1 \cong \angle 6$ ,  $\angle 3 \cong \angle 4$  y  $\overline{AD} \cong \overline{CE}$ , ¿qué utilizarías para probar  $\angle ABD \cong \angle CBE$ ?



- (a) El postulado de congruencia ALA entre los triángulos ABD y CBE.
- (b) El postulado de congruencia LAL entre los triángulos ABD y CBE.
- (c) El postulado de congruencia ALA entre los triángulos ABE y CBD.
- (d) El criterio de semejanza AA entre los triángulos ABC y EBD.

**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

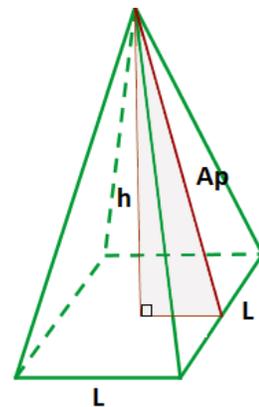
Las medidas características de un cono recto son el radio ( $r$ ) de su base, la altura ( $h$ ) y la generatriz ( $g$ ). Se muestran en la siguiente imagen:

36. Resuelve el siguiente problema considerando que  $h \perp r$ , el área total es

$$A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g \text{ y el volumen es } V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}.$$

Calcula el 25% del volumen de un cono que tiene un área lateral de  $240\pi$  pulg<sup>2</sup> y 24 pulgadas de diámetro.

- (a)  $384\pi$  pulg<sup>3</sup>
- (b)  $768\pi$  pulg<sup>3</sup>
- (c)  $192\pi$  pulg<sup>3</sup>
- (d)  $240\pi$  pulg<sup>3</sup>



**(+) 9.G.12.1** Usa el principio de Cavalieri, presenta un argumento informal para las fórmulas de volumen de una esfera y de otras figuras sólidas.

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección, el principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

**9.G.10.2** Aplica métodos geométricos para resolver problemas de diseño (ej., diseñar un objeto o estructura para satisfacer restricciones físicas o minimizar costos; trabajar con sistemas tipográficos de cuadrículas basados en razones).

En la siguiente imagen se muestran las medidas características de una pirámide cuadrangular: el lado  $L$  de su base, su altura  $h$  y la apotema  $Ap$ .

La apotema representa la altura de cada, por esto también se la llama altura inclinada. Resuelve el siguiente problema considerando que  $h \perp L$ , el área total es  $A = L^2 + 2L \cdot Ap$  y

el volumen es  $V = \frac{L^2 \cdot h}{3}$ .

37. ¿Cuántos  $\text{cm}^2$  de papel se necesitan para envolver una pirámide de base cuadrada con 12 cm de lado y 8 cm de altura?

- (a)  $240 \text{ cm}^2$
- (b)  $384 \text{ cm}^2$
- (c)  $336 \text{ cm}^2$
- (d)  $490.13 \text{ cm}^2$

**9.N.1.1** Usa las propiedades para entender y resolver problemas de varios pasos; escoge e interpreta unidades en fórmulas de manera consistente; escoge e interpreta la escala y el origen en gráficas y al representar de datos.

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

El área total de un cono es  $A = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot g$  y su volumen  $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$ . Siendo  $r$  el radio,  $h$  la altura y  $g$  la medida de la generatriz.

38. Se quiere construir un recipiente sin tapa con forma cónica de 30 cm de profundidad y 80 cm de diámetro. Si se utiliza una lámina metálica rectangular de 90 cm de largo por 80 cm de ancho, ¿cuánto material sobra?

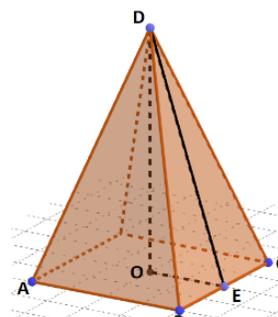
- (a)  $3,430 \text{ cm}^2$
- (b)  $4,800 \text{ cm}^2$
- (c)  $2,487.6 \text{ cm}^2$
- (d)  $916.8 \text{ cm}^2$

**(+) 9.G.12.1** Usa el principio de Cavalieri, presenta un argumento informal para las fórmulas de volumen de una esfera y de otras figuras sólidas.

**9.M.13.1** Presenta un argumento informal para las fórmulas de la circunferencia de un círculo, área de un círculo, volumen de un cilindro, pirámide y cono. Usa argumentos de disección, el principio de Cavalieri y argumentos informales sobre límites.

**9.M.13.2** Resuelve problemas usando las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.

El volumen de una pirámide es la tercera parte del producto entre el área de su base y la altura. Es decir,  $V = \frac{A_{\text{base}} \cdot h}{3}$ . De esta expresión se deduce que, si la base es cuadrada, el volumen aumenta el cuadrado del factor que modifique el lado  $L$  de la base. Y si la altura varía con un factor de escala  $k$ , el volumen cambia de igual manera.



39. Las medidas de una pirámide cuadrangular son una altura  $h$  y un lado de longitud  $L$  en su base. Si duplicamos su lado y reducimos a la mitad su altura, ¿qué sucede con su volumen?

- (a) Permanece igual.                      (b) Se duplica.  
(c) Se reduce a la mitad.                (d) Aumenta en un factor de 4.

**9.M.13.2 Resuelve problemas mediante las fórmulas de cilindros, pirámides, conos y esferas.**

El volumen de una pirámide queda definido con la medida de su altura y las dimensiones de su base de apoyo. En una pirámide cuadrangular de base  $L \times L$  y altura  $h$ , el volumen se halla por medio de la expresión  $V = \frac{L^2 \cdot h}{3}$ .

40. Observa la siguiente pirámide cuadrada y calcula su volumen sabiendo que  $\overline{OE} \perp \overline{OD}$ ,  $\overline{AB} = 4u$  y  $\overline{DE} = \sqrt{13}u$ .

- (a)  $16u^3$                                       (b)  $48u^3$   
(c)  $12u^3$                                       (d)  $\frac{16}{3}\sqrt{13}u^3$

